Μάθημα 16º 7/12/2017

Διαφ. Εξισώσεις

(I_o) : $a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$ $a_i \in \mathbb{R}$

$y'' + p y' + q y = 0$ $p, q \in \mathbb{R}$

λύσεις $y(x) = e^{\lambda x}$

τα λ είναι ρίζες του $\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \to \lambda_1, \lambda_2$

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$

i) $\Delta > 0$ τότε Β.Σ.Λ $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}$

ii) $\Delta = 0$ τότε $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

$y_1(x) = e^{\lambda x}$ θέλω άλλη μια και επιπλέον γρ. ανεξ. με την y_1

υποβιβασμός τάξης

$y = y_1 z$

$(y_1 z)'' + p(y_1 z)' + q y_1 z = 0$

$y_1'' z + 2y_1' z' + y_1 z'' + p y_1' z + p y_1 z' + q y_1 z = 0$

$z(y_1'' + p y_1' + q y_1) + (2y_1' + p y_1) z' + y_1 z'' = 0$

$(2\lambda e^{\lambda x} + p e^{\lambda x}) z' + e^{\lambda x} z'' = 0$

.....

iii) $\Delta < 0$ τότε

$$\lambda_{1,2} = \frac{-p \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2}$$

π.χ. $y'' + 4y = 0$

$\lambda^2 + 4 = 0 \to 2i, -2i$

$\tilde{y}_1(x) = e^{2ix} = \cos 2x + i \sin 2x$

$\tilde{y}_2(x) = e^{-2ix} = \cos 2x - i \sin 2x$

$\Delta < 0$: $\lambda_{1,2} = \dfrac{-p \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2} = \sigma \pm i\tau$ / $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$

$y_1 = e^{(\sigma + i\tau)x} = e^{\sigma x}(\cos(\tau x) + i e^{\sigma x} \sin(\tau x))$

$y_2 = e^{(\sigma - i\tau)x} = e^{\sigma x} \cos(\tau x) - i e^{\sigma x} \sin(\tau x)$

$\{e^{\sigma x}\cos(\tau x), e^{\sigma x}\sin(\tau x)\}$ ΒΣΛ οταν εχω μιγαδικες ριζες

Ασκηση 1 i, σελ 113

$2y'' + 3y' + y = 0$

χ.π $2\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$

$\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1/2$

ΒΣΛ $\{e^{-x}, e^{-1/2 \cdot x}\}$

1(iv)

$y'' - 9y = 0$

$\lambda^2 - 9 = 0$

$\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -3$

ΒΣΛ $\{e^{3x}, e^{-3x}\}$

Ασκ 1 i, σελ 113

$y'' + y' + y = 0$

χπ $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$

$\lambda_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}\, i}{2}$

$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$

ΒΣΛ με πραγμ συναρτησ

$$\{e^{-\frac{1}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right), e^{-\frac{1}{2}x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\} \quad x\in\mathbb{R}$$

• (E_0) $a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$, $a_i \in \mathbb{R}$ $\quad // e^{\lambda x}$

χ.π $a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$, $a_i \in \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, $a_n \neq 0$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ διακεκριμένες

$m_1, m_2, \dots, m_r$ πολλαπλότητες $(m_1 + \dots + m_r = n)$

Πρόταση (Θεωρ 19, σελ 97-98)

Ας είναι $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ οι διακεκριμένες ρίζες του χ.π της (E_0) με πολλαπλότητες $m_1, \dots, m_s$ $(m_1 + \dots + m_s = n)$

Τότε οι συναρτήσεις

$$x^j e^{\lambda_j x}, \quad j = 0, \dots, m-1, \quad j = 1, \dots, s$$

αποτελούν ένα βασικό σύνολο λύσεων της (E_0)

• $L(y)(x) = L((\mathrm{Re}\,y)(x) + i(\mathrm{Im}\,y)(x)) = L(\mathrm{Re}\,y)(x) + i\,L(\mathrm{Im}\,y)(x)$

Πρόταση (Θεωρ 20)

Υποθέτουμε ότι $a_i \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ $(i = 0, \dots, n)$

Για την ομογενή ΓΔΕ (E_0) ισχύουν τα εξής

i) αν y λύση της (E_0) τότε $\mathrm{Re}\,y$, $\mathrm{Im}\,y$ είναι πραγματικές λύσεις της (E_0)

ii) κάθε λύση y με πραγμ αρχικές τιμές είναι πραγματική

iii) Αν $\{y_1, \dots, y_n\}$ ΒΣΛ με πραγματικές συναρτήσεις τότε y πραγματική λύση ανν υπάρχουν πραγματικές σταθερές $c_1, \dots, c_n$

$$y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$$

ii) Ας είναι $\lambda_1 = \sigma_1 + i\tau_1, \ldots, \lambda_r = \sigma_r + i\tau_r$
$(\tau_k \neq 0,\ k = 1..r)$ διακεκρ. ρίζες του χ.π πολ/τος
$m_1, \ldots, m_r$ που $\lambda_{2r+1}, \ldots, \lambda_s$ πραγμ. διακεκρ. ρίζες
πολ/τας $m_{2r+1}, \ldots, m_s$

Τότε οι συναρτήσεις
$x^j e^{\sigma_k x} \cos(\tau_k x)$, $x^j e^{\sigma_k x} \sin(\tau_k x)$ $x \in \mathbb{R}$
$j = 0, \ldots, m_k - 1$, $k = 1, \ldots, r$
$x^j e^{\lambda_k x}$, $x \in \mathbb{R}$, $j = 0, \ldots, m_k - 1$, $k = 2r+1, \ldots, s$, $x \in \mathbb{R}$
αποτελούν ένα ΒΣΛ με πραγματικές συναρτήσεις

Άσκηση
$y''' - 7y'' + 5y' + y = 0$
χ.π $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 5\lambda + 1 = 0$
το 1 ρίζα

1	-7	5	1	1
	1	-6	-1	
1	-6	-1	0	

Horner

Άσκηση
$y^{(4)} + 2y'' + y = 0$
χ.π $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = p(\lambda)$
$(\lambda^2 + 1)^2 = 0$
$\pm i$

έστω i έχω $\cos x$ $\sin x$
$-i$ έχω $x\cos x$ $x\sin x$

~~HW~~

$y^{(4)} + y = 0$ Να βρούμε το ΒΣΛ

Άσκηση

$y'' + y = b(x)$ $x \geq 1$ $b \in [1, +\infty)$

i) Μια μερική λύση είναι $y_\mu = \int_1^x \sin(x-t)\, b(t)\, dt$, $x \geq 1$

ii) αν $\int_1^\infty |b(s)|\, ds < \infty$ τότε όλες οι λύσεις φραγμένες

Λύση

i) $y'' + y = 0$

$\lambda^2 + 1 = 0$

λύσεις $\pm i$

$\{ y_1(x) = \cos x, \ y_2(x) = \sin x \}$

$$y_\mu = y_1(x) \int_1^x \frac{W_1(s)}{W(s)} b(s)\, ds + y_2(x) \int_1^x \frac{W_2(s)}{W(s)} b(s)\, ds = \ldots$$

ή μπορώ να επιβεβαιώσω τη y_μ

$$y'_\mu = \sin\overset{0}{(x-x)}\, b(x) + \int_1^x \cos(x-t)\, b(x)\, dt$$

$$y''_\mu = \cos\overset{1}{(x-x)}\, b(x) + \int_1^x -\sin(x-t)\, b(t)\, dt = b(x) - y_\mu(x)$$

ii) ΒΣΛ $\{\cos x, \sin x\}$

$$|y(x)| = \left| c_1 \cos x + c_2 \sin x + \int_1^x \sin(x-t)\, b(t)\, dt \right| \leq$$

$$\leq 1\, |c_1| + |c_2| + \left| \int_1^x \sin(x-t)\, b(t)\, dt \right|$$

$$\leq |c_1| + |c_2| + \int_1^x |\sin(x-t)|\, |b(t)|\, dt$$

$$\leq |c_1| + |c_2| + \underbrace{\int_1^x 1 \cdot |b(t)|\, dt}_{M} \leq |c_1| + |c_2| + M, \ \forall x \geq 1$$

B-52, B-44, B-58, B-38, B-113

$y''' + y'' + y' + y = 0$

$\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \rightsquigarrow \dfrac{\lambda^4 - 1}{\lambda - 1} = 0 \Rightarrow \lambda^4 - 1 = 0,\ \lambda \neq 1$

$(\lambda + 1)(\lambda^2 + 1) = 0$

$y^{(5)} + y^{(4)} + y^{(3)} + y^{(2)} + y' + y = 0$

για επομενη φορα να θυμαμαι

$z^n - 1 = 0$

ολες τις μιγαδικες λυσεις